

Quelques repères théoriques sur la résolution de problèmes comme modalité pédagogique

Symposium, ITA, 29 mars 2019

Jacinthe Giroux, UQAM



Plan

- Introduction
 1. Définitions, perspectives, principes, fonctions de la résolution de problèmes
 2. Caractéristiques d'une situation-problème pour l'apprentissage en mathématiques et exemples
 3. Soutien aux élèves en difficultés
- Conclusion

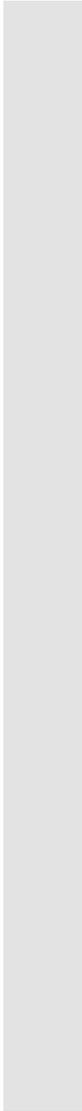
Introduction

- Répondant à une demande des organisateurs, l'objectif de cette communication est d'offrir aux participants quelques repères théoriques sur la résolution de problèmes comme modalité pédagogique pour apprendre les mathématiques.
- La résolution de problèmes est un champ d'études extrêmement vaste et investi par différentes disciplines dont les travaux influencent les programmes, la formation, les outils d'enseignement, etc.
 - Mathématiques
 - Psychologie cognitive
 - Didactiques disciplinaires, dont la didactique des mathématiques
 - Pédagogie



Définitions, perspectives, principes et fonctions de la résolution de problèmes

Considérations théoriques de base



Deux citations

Un principe

- « Les rapports entre apprentissage et résolution de problèmes est l'une des questions les plus complexes dans le domaine de l'éducation du fait que cette question est intrinsèquement liée à la formation et au fonctionnement des connaissances mathématiques. » (Julo, 2002, p. 31).
- « Un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résout pas de problèmes. Tout le monde s'entend là-dessus. Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de savoir quels problèmes il doit se poser, qui les pose, et comment. » (Brousseau, 1983, p. 167).

Principe : les savoirs mathématiques prennent du sens dans les problèmes qu'ils permettent de résoudre efficacement.

Définition

Problème mathématique

Du latin, Problema : Ce que l'on a devant soi, spécialement un obstacle, un sujet de controverse, une question à résoudre (Rey, 1995)

Problème mathématique

- Question à résoudre dont la solution n'est pas immédiate et faisant appel à une démarche heuristique, c'est-à-dire, une recherche par tâtonnement, invention, combinaison de nouvelles de connaissances permettant d'accéder à une solution (Inspiré de Glaeser, 1973).

Problème à énoncés verbaux

- Texte bref décrivant l'essentiel d'une situation comportant certaines quantités explicitement données et d'autres non et une ou des questions (Inspiré de Verschaffel, Greer et De Corte, 2000).

Deux perspectives d'études sur la résolution de problèmes

Psychologie cognitive

Étude des processus cognitifs mis en œuvre en résolution de problèmes.

La construction de la représentation de la tâche est appelée compréhension, la construction de la procédure, stratégie de résolution (HOC, 1987).

Didactique des mathématiques

Étude des processus enseignement/apprentissage des mathématiques en situation de résolution de problèmes.

L'apprentissage est considéré du point de vue des stratégies nouvelles mises en œuvre comme outil de résolution.

Fonctions attribuées aux problèmes

(Demonty et Fagnant, 2012)

Trois grandes catégories qui se distinguent par les finalités poursuivies

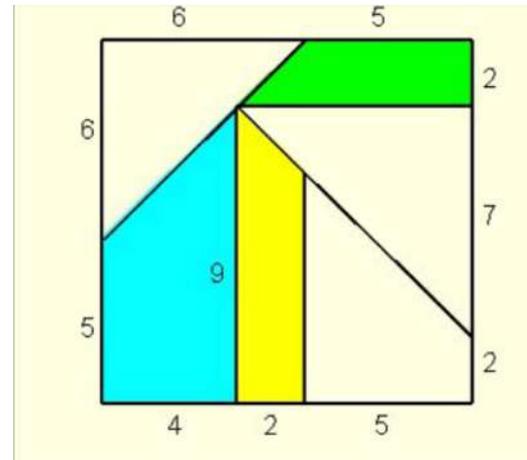
- Les problèmes qui ont pour objectif la construction de nouvelles connaissances (les situations-problèmes proposées en début d'apprentissage).
- Les problèmes qui ont pour objectif de réinvestir les connaissances acquises et parmi lesquels , on retrouve;
 - les problèmes d'application directe ou de réinvestissement.
 - les problèmes d'intégration qui nécessitent de mobiliser et d'intégrer diverses connaissances et procédures.
- Les problèmes «ouverts» destinés à placer les élèves en situation de recherche et visant à développer la modélisation mathématique.

Trois exemples

Exemple 1

Kamel dit que s'il ajoute les deux numéros de page du livre ouvert devant lui, il trouve 40. Lisa lui répond que ce n'est pas possible. Et toi qu'en penses-tu ? (CAP Maths CM1)

Exemple 2



Agrandissement d'un casse-tête.
Le segment qui mesure 4 doit mesurer 7
sur le casse-tête agrandi. (Brousseau,
1988)

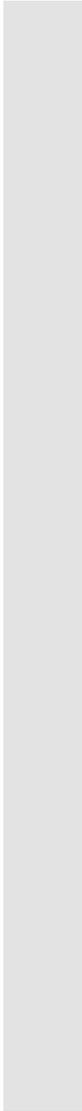
Exemple 3

La légende raconte que, dans les grandes plaines de Russie, le terrible géant Tneïntok était si grand qu'il ne pouvait se déplacer que par bonds de 24 verstes. Se trouvant à 5940 verstes de son château, en combien de bonds pouvait-il l'atteindre ? (tiré de Descaves, 1992).



Caractéristiques d'une situation- problème pour l'apprentissage en mathématiques et exemples

L'activité mathématique comme interactions



Caractéristiques
d'une situation-
problème pour
l'apprentissage
de
connaissances
nouvelles
(Douady, 1984)

- 1. L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème et envisager ce qu'est une réponse possible.
- 2. Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème.
- 3. La situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas.
- 4. La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève.
- 5. Le problème peut se formuler dans plusieurs cadres entre lesquels on peut établir des correspondances (par exemple cadre physique, cadre géométrique, cadre graphique)

Exemple de situation-problème pour l'acquisition de nouvelles connaissances

C'est souvent par la reprise d'une même situation de référence qu'on vise l'évolution des stratégies et donc les connaissances.

Situation-problème de communication comme amorce pour l'introduction de la multiplication (Briand et Chevalier, 1995)

Groupe Émetteur - **Message numérique** -> Groupe Récepteur



Grille de 7 x 12



Doit identifier la grille de l'émetteur

7 x 12

6x12

7 x 13

8x 12

7x11

6 x14

4x21

2x42

3x28

Exemple de
problème
ouvert pour
l'acquisition de
nouvelles
connaissances

Problème ouvert.

Les malheurs d'Alfred (Extraits de Annales, Poitiers, 1992)

Au cours de la séance d'éducation physique, l'enseignant organise un jeu :

Vous courez dans tous les sens et au signal, vous vous regroupez par 5. Au signal convenu, chacun s'exécute. Alfred, étonné, se retrouve seul. Parfait! Dit l'enseignant. Maintenant vous faites la même chose mais vous vous regroupez par 3.

À nouveau, au signal, les groupes se forment. Et cette fois encore, Alfred se retrouve seul. Qu'à cela ne tienne, pense-t-il, j'aurai plus de chance avec les groupes de 2 que demande maintenant l'enseignant! Mais hélas, le voici encore seul!

Explique à Alfred ce qui se passe et trouve le nombre d'élèves de la classe sachant que celui-ci est compris entre 0 et 50.

Quelques productions d'élèves

Stratégie aboutie
liste de nombres :
 $2n + 1$

The image shows a student's handwritten work on lined paper. On the left, there is a vertical list of numbers from 3 to 25, with some numbers crossed out. The numbers are: ~~3~~, ~~5~~, ~~7~~, ~~9~~, ~~11~~, ~~13~~, ~~15~~, ~~17~~, ~~19~~, ~~21~~, ~~23~~, and ~~25~~. To the right of these numbers, there are pairs of numbers: 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, and 49. The number 31 is circled in blue. To the right of the circled 31, the text "impossible Trop gros" is written. Below this, the text "Il y a 31 élèves dans la classe" is written. On the far left, there is a small note "trop petit" with an arrow pointing to the circled 31.

~~3~~, ~~5~~, ~~7~~, ~~9~~, ~~11~~, ~~13~~, ~~15~~, ~~17~~, ~~19~~, ~~21~~, ~~23~~, ~~25~~

27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49

impossible Trop gros

Il y a 31 élèves dans la classe

trop petit

Quelques productions d'élèves

Stratégies abouties strictement numériques

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
~~15~~ ~~16~~ ~~17~~ ~~18~~ ~~19~~ ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ ~~23~~ ~~24~~
25 26 27 28 29 30 (31) 32 33
34 35 36 37 38 39 40 41 42 43
44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 3 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \\ \times 2 \\ \hline 30 \end{array} \quad \vee \quad 31 \text{ persone}$$

parce que il reste juste lui dans
le nombre 31 parce que

$$5 \times 6 = 30 \text{ reste } 1$$

$$2 \times 15 = 30 \text{ reste } 1$$

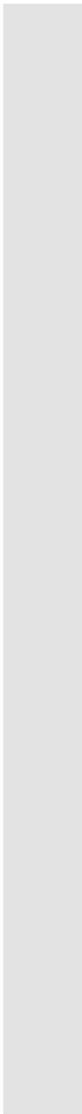
$$3 \times 10 = 30 \text{ reste } 1$$

La résolution
comme activité
mathématique

L'activité
mathématique
comme
interactions

(Maheux et Proulx, 2014)

- ...l'activité mathématique, bien que liée à l'apprenant et à la tâche (Davis, 1995), ne peut être réduite ni à l'un ni à l'autre : elle émerge, toujours en mouvement, à la rencontre des deux (Davis et al., 1996).
- On dira par exemple que l'apprenant qui réalise une tâche mathématique fait émerger une stratégie située dans la tâche (Thom et al., 2009), la tâche ayant de son côté permis à cette stratégie de voir le jour.
- C'est la raison pour laquelle, comme l'explique René de Cotret (1999), on ne peut tenir pour acquis que des propriétés instructionnelles sont présentes de façon inhérente dans les situations offertes aux élèves; nous disons plutôt qu'elles émergent dans l'interaction. (Maheux et Proulx, 2014, p. 29).



Le soutien aux élèves en difficultés scolaires

Dans le choix des problèmes

Dans les interactions didactiques

Soutien aux
élèves en
difficultés...

Le choix des
problèmes

- Favoriser des situations dont les consignes, le matériel ou le contexte n'écrasent pas le savoir en tant qu'enjeu de la situation.
- Des problèmes dont l'énoncé est relativement bref et compréhensible et dont le but est clair.

Le travail des élèves doit porter sur un enjeu mathématique et non sur l'appropriation d'un contexte et de ses « règles ».

Un contexte trop prégnant peut contraindre à un fonctionnement local des connaissances.

Soutien aux
élèves en
difficultés...

Le choix des
problèmes

- **Offrir des types variés de problèmes (Descaves, 1993).**

Sur le fonctionnement «relativement» autonome des mathématiques

Ex1.: J'ai une vieille calculatrice et les seules choses que je peux faire est +, -, 5, 12. Quand je l'ouvre elle affiche 2007. Comment faire pour afficher 2008 ?

(Coulange et Reydy, 2014)

Ex2.: Trouve trois nombres consécutifs dont la somme est 270 (Barallobres, 2002).

Soutien aux
élèves en
difficultés...

Le choix des
problèmes

Sur la mathématisation du monde de l'expérience

Dans une fabrique où l'on emploie un nombre égal d'hommes, de femmes et d'enfants, il a fallu 1060,80 \$ pour payer les ouvriers après une semaine de 6 jours de travail. Les hommes gagnent 1,75\$ par jour, les femmes 1 \$ et les enfants, 0,65 \$. Combien la fabrique emploie-t-elle d'ouvriers de chaque catégorie ?

Problème no 289 tiré du manuel *Arithmétique. Cours complémentaire (ancien cours supérieur)*. Livre du manuel. Les Frères des Écoles Chrétiennes. 1926.

Soutien aux
élèves en
difficultés...

Le choix des
problèmes

Sur la mathématisation d'une situation «imaginaire», mais dont le contexte est simple.

« En me promenant dans la forêt, j'ai surpris un jour une violente dispute entre 5 animaux.

La fourmi: Cette clairière mesure 240 pas de largeur

Le chat : Pas du tout, elle fait 15 pas !

Le renard : À mon avis, c'est 10 pas.

La souris : Moi, j'aurais dit 36 pas.

Le lion : Silence ! Cette clairière mesure 3 pas.

Ils décident de vérifier et personne n'a menti ! Que se passe-t-il donc ?

Soutien aux
élèves en
difficultés...

Les
interactions
didactiques

- **Organiser l'environnement de manière à favoriser une rétroaction rapide sur la justesse des connaissances engagées.**

Plus le temps est long entre l'action et la rétroaction, plus l'hypothèse engagée par l'élève à travers sa stratégie s'évanouit et affecte son engagement mathématique.

Une rétroaction rapide peut stimuler l'élève à anticiper une nouvelle stratégie, à engager d'autres avenues, d'autres connaissances.

Soutien aux
élèves en
difficultés...

Les
interactions
didactiques

- **Soutien à la mise en œuvre d'une stratégie finalisée pour que l'élève puisse apprécier l'effet ou l'efficacité de sa stratégie.**

Éviter l'émergence des « poupées russes » de problèmes techniques ou instrumentaux qui fait perdre de vue le but poursuivi.

La fragilité des connaissances peut mettre en péril la possibilité de finaliser une stratégie et de savoir si la stratégie est utile.

Permet de maintenir la relation entre l'action et le résultat de l'action, entre la stratégie et le but poursuivi.

Soutien aux
élèves en
difficultés...

Les
interactions
didactiques

- **Soutenir le passage à l'écrit mathématique pour favoriser la modélisation de la situation**

*«Les élèves n'ont pas à produire des écritures additives correspondant à l'indication d'un calcul à faire, mais des égalités qui sont les modèles possibles d'une situation... »
(Mercier et Quilico, 2018).*

Utiliser des expressions mathématiques pour décrire une situation quantitative est modéliser.

L'écrit sert à modéliser et ouvre sur le calcul. Mais il y a chez les élèves, les écritures pour modéliser et celles pour calculer.

La résolution comme activité mathématique

Mettre en
relation
et
Calculer

Une enseignante a commandé des cahiers d'exercice pour ses élèves. Chaque boîte contient 12 cahiers. Elle achète 7 boîtes. Combien de cahier a-t-elle achetés ?

Plusieurs mises en relation des données ou solutions sont possibles:

- 1) Addition itérée : $12 \text{ (cahiers)} + 12 \text{ (cahiers)} + \dots = 96 \text{ cahiers}$
- 2) Opérateur scalaire : $12 \text{ (cahiers)} \times 7 = 96 \text{ cahiers}$
- 3) Articulation entre deux grandeurs: $12 \text{ (cahiers/boîte)} \times 7 \text{ (boîtes)} = 96 \text{ cahiers}$

Plusieurs procédés ou calcul pour trouver le résultat numérique sont possibles

- Dessin ou schéma
- Addition répétée, multiplication avec ou sans l'aide d'une calculatrice

Soutien aux
élèves en
difficultés

Les
interactions
didactiques

Capitaliser sur la sensibilité des élèves aux régularités.

- L'abstraction des régularités favorise la décontextualisation
- La connaissance permet d'anticiper et d'exercer un contrôle sur le réel.
- L'abstraction des régularités participe à l'institutionnalisation.
- L'institutionnalisation comme identification d'une connaissance partagée par une communauté.

Conclusion

- **Faire faire des mathématiques, c'est aussi faire des mathématiques**

Connaitre la solution ne dispense pas l'enseignant de faire des mathématiques surtout en contexte de soutien.

Il faut faire des mathématiques en même temps que l'élève (analogie avec professeur de musique).

Pour cela, il est avantageux de connaitre ce que peut générer l'énoncé comme activité mathématique de l'élève pour bonifier nos interactions.